

河圖、洛書、八卦與魔術方陣

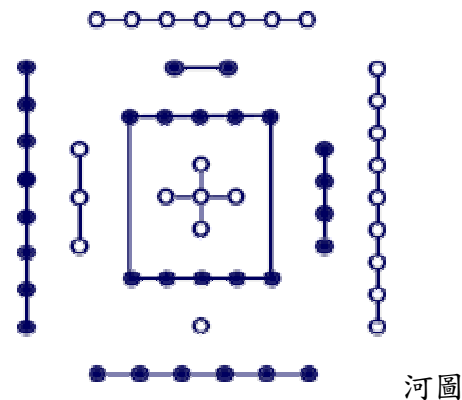
方煒

台大生物產業機電工程學系教授

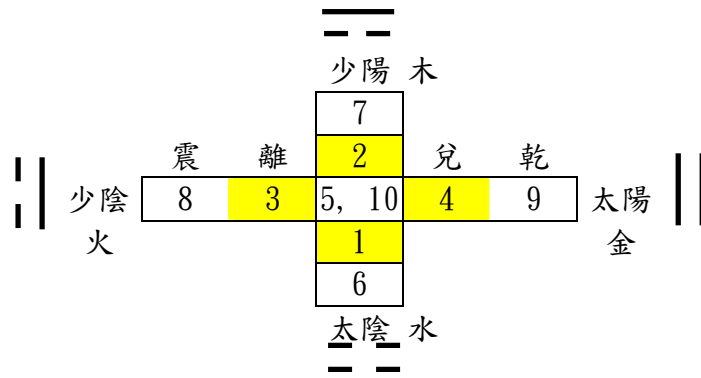
- 一、 河圖
- 二、 河圖與太極圖
- 三、 洛書
- 四、 洛書、五行與八卦
- 五、 八卦與六十四卦
- 六、 占卜 DIY
- 七、 魔術方陣
 1. 奇數魔術方陣
 2. 倍偶數魔術方陣
 3. 單偶數魔術方陣

一、 河圖

河圖據傳為伏羲氏發現於龍馬背上的圖案，如下所示，圖案由空心圓圈、實心圓點與線段構成，相連的點數即為代表的數字，涵括 1 至 10。其中，奇數以空心圓圈表示，偶數以實心圓點表示。

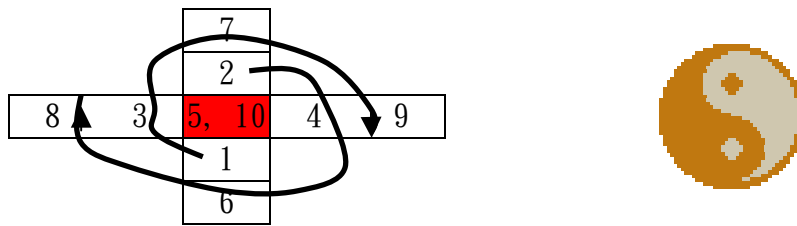


如下表所示為河圖的數字表示法，黃色網底各格加上中間的五，即為最外格之數。奇數代表陽、代表天，偶數代表陰，代表地。偶數與奇數代表陰陽兩極，最外層 9, 7, 8, 6 為四象，四象之外，再加一連線或一斷線，可得八卦。其中，太陽下分乾(天九)與兌(地四)，少陽下分巽(地二)與坎(天七)，少陰下分離(天三)與震(地八)，太陰下分與艮(地六)與坤(天一)。



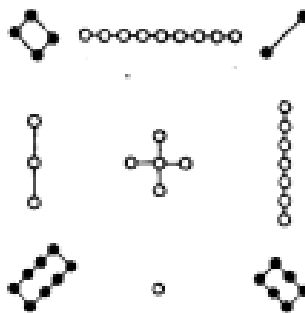
二、河圖與太極圖

在河圖中連結 5 之外的奇(/天)數 1, 3, 7, 9 得太極圖中陽極走向為右旋逆行，此為先天八卦中陽四卦的走向。連結 10 之外的偶(/地)數 2, 4, 6, 8 得太極圖中陰極走向為左旋順行，此為先天八卦中陰四卦的走向。構成生物遺傳密碼的 DNA 也分左旋與右旋，巧合乎？還是大自然本來就是如此。



三、洛書

洛書，涵括數字 1 至 9，相傳為大禹治水時於洛水發現刻於龜背上的圖案。與河圖的表示法相同，奇數(空心圓圈)為陽為天，偶數(實心圓點)為陰為地。河圖五、十居中之外的其餘八數，也就是洛書中五除外的八數。相傳周文王被紂王幽禁時，即依據此八數演繹出八卦。宋朝數學家楊輝所著「續古摘奇算經」上卷以縱橫圖稱呼洛書，內容提到『九子斜排，上下對易，左右相更，四維漸出，戴九履一，左三右七，二四為肩，六八為足，五居其中』。



洛書

河圖與洛書是一體的兩面，如下表所示為洛書的數字表示法，黃色區為河

圖之內環，綠色區為河圖之外環。中心 5 之外的 8 個數字即為河圖中心 5, 10 之外的 8 個數字。洛書是由 1 至 9 共 9 個連續數字的最平衡的排列方式，但其可以不需由 1 開始，其可擴大為由任意數字開始的九個等間隔數字的最平衡排法。

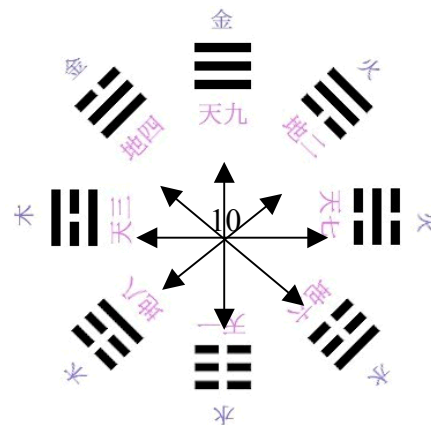
4	9	2
3	5	7
8	1	6

前人仰觀天文、俯察萬物，由河圖與洛書整理出一套中國人獨有的陰陽二元理論與八卦五行之說，舉凡命理、風水，甚至奇門遁甲等均源於此，易經更是集其大成的一套工具書。練習書法也用九宮格紙，室內裝潢講究均衡亦以九宮格法評估設計。

四、 洛書、五行與八卦

洛書外圍八數與八卦的排列也是一致的，其中奇數為天，偶數為地。扣除中間的五，對稱組之和為 10。左四為陽四卦，陽極(實線)在最內層，右四為陰四卦，陰極(斷線)在最內層。太陽卦為金，少陰卦為木，少陽卦為火，太陰卦為水，中間為土。

4 金	9 金	2 火
3 木	5 土	7 火
8 木	1 水	6 水

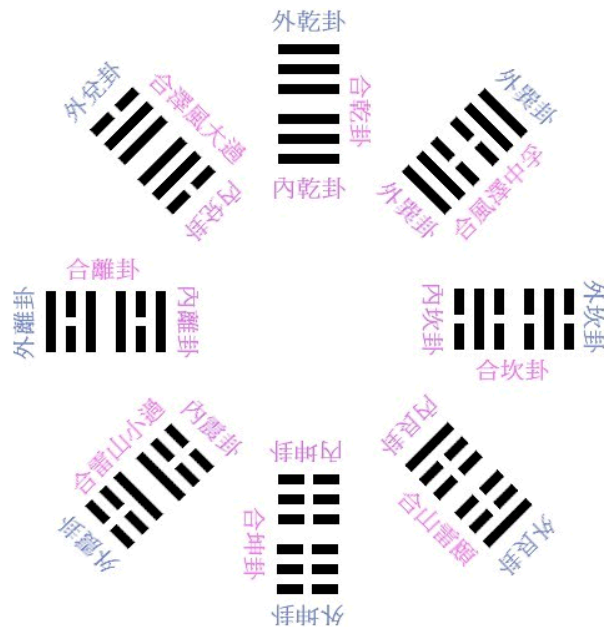


五、 八卦、六十四卦與二元表示法

八卦名稱為乾、兌、離、震、巽、坎、艮、坤。其對應的現象則為天、澤、火、雷、風、水、山、地。由於陰陽的表示法與 01 的數位表示法相同，所以卦象可採二元表示法，如下表所示：

水	水	火	火	木	木	金	金
坤八	艮七	坎六	巽五	震四	離三	兌二	乾一
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7
地	山	水	風	雷	火	澤	天
北	西北	西	西南	東北	東	東南	南

如下圖所示，兩個八卦成同心圓排列，任八卦一繞圓心轉動可得 64 個組合即為 64 卦。



六十四卦亦有表示成八八方塊的寫法，置於 64 卦圓輪之內，外轉輪為天，方塊不動為地，天動地靜，外圓內方。外轉輪左三十二卦為陽卦，由乾卦開始，終於復卦。右三十二卦為陰卦，由姤卦開始至坤卦終止。內方塊以乾卦位於右下角，朝左依序排列陽三十二卦為 4 列，再接著排列陰三十二卦為 4 列，坤卦結束於內方塊的左上方。

六、 占卜 DIY

使用銅板，正面為陽，反面為陰，投擲六次，由下往上把各次結果畫出，即可得出卦象。後三擲為上卦(6, 5, 4 擲為正反反表示為 100 為山為艮)，前三擲為下卦(3, 2, 1 擲為反正反表示為 010 為水為坎)，有了上下卦(上卦為山，下卦為水)，查詢下表即可得出卦名(蒙)。易經的內容即在解釋 64 卦中各個卦名的意義，乾與坤為首二卦。

澤 011	山 100	火 101	水 010	風 110	雷 001	地 000	天 111	上卦 下卦
決	大畜	大有	需	小畜	大壯	泰	乾	天 111
萃	剝	晉	比	觀	豫	坤	否	地 000
隨	頤	噬嗑	屯	益	震	復	無妄	雷 001
大過	蠱	鼎	井	巽	恆	升	姤	風 110
困	蒙	未濟	坎	渙	解	師	訟	水 010
革	賁	離	既濟	家人	豐	明夷	同人	火 101
咸	艮	旅	蹇	漸	小過	謙	之豚	山 100
兌	損	睽	節	中孚	歸妹	臨	履	澤 011

七、 魔術方陣

魔術方陣為 $N \times N$ 的陣列， N 為列數與欄數，由 N^2 個數字共同組成方陣。在 MATLAB 中，於 Command Window 內輸入 `magic(N)` 可直接求出魔術方陣的內容，MATLAB 有關 `magic(N)` 的定義如下：

MAGIC(N) is an N-by-N matrix constructed from the integers 1 through N^2 with equal row, column, and diagonal sums. Produces valid magic squares for $N = 1, 3, 4, 5, \dots$

魔術方陣可依 N 值為奇數或偶數分為奇數魔術方陣與偶數魔術方陣，洛書是奇數魔術方陣中最簡單的一型。後者又可依 $N/2$ 為奇數或偶數，再分為倍偶數與單偶數魔術方陣。

1. 奇數魔術方陣

當 $\text{mod}(N, 2) == 1$ 成立時，

A	B	C
D	E	F
G	H	I

數學法求解：

$A+B+C=15$, $D+E+F=15$, $G+H+I=15$, $A+D+G=15$, $B+E+H=15$, $C+F+I=15$,
 $A+E+I=15$, $C+E+G=15$, 總共九個未知數，八個方程式。

提示： $E=5$ 。其中一組答案如下，正是洛書的數學表示法：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

基於方陣可以旋轉而不會改變各列、各欄之和，所以同順序的正確答案尚有其他三個方陣。另外，上下兩列對調，左右兩欄對調，均不影響答案的正確性。所以真正的組合不只此處列出的四組。

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

求解奇數魔術方陣的步驟：

1.	由首列中間格開始填入 1	2.	朝右上方向，依序填入，
3.	假設最上格與最下格相連	4.	假設最右格與最左格相連
5.	右上格已填滿時，填入原格下一列。		

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Magic(5), 各列和=各行和=各對角線和=65

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

MATLAB 程式解法

```
[J,I] = meshgrid(1:n);
A = mod(I+J-(n+3)/2,n);      B = mod(I+2*J-2,n);
M = n*A + B + 1;
```

2. 倍偶數魔術方陣

N 除以 2 為偶數者(當 $\text{mod}(N, 4) == 0$ 成立)為倍偶數(doubly even)方陣。

做法：

1. 由左上至右下，依序填入 1-16，對角線上各格不填。
2. 由右下至左上，依序填入 1-16，只填對角線上各格。

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Magic(4) 各列和=各行和=各對角線和=34

3. 當方陣數大於 4 且為 4 的倍數時，以 4x4 為單元，繪出對角線，其他步驟同步驟 1 與 2。

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Magic(8) , 各列和=各行和=各對角線和= 260

MATLAB 程式解法

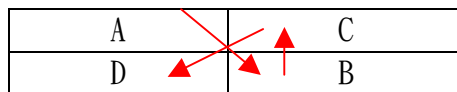
```
[J,I] = meshgrid(1:n);
K = fix(mod(I,4)/2) == fix(mod(J,4)/2);
M = reshape(1:n*n,n,n);
M(K) = n*n+1 - M(K);
```

3. 單偶數魔術方陣

N 除以 2 為奇數者(當 $\text{mod}(N, 4) \neq 0$ 且 $\text{mod}(N, 2) = 0$ 成立時), 稱為單偶數 (single even) 方陣。

做法：

- 步驟 1. 將 $N/2$ 得 p , 首先求出 p 的奇數方陣。
- 步驟 2. 將 $N \times N$ 的單偶數方陣分為 4 區, 各區以 p 的奇數方陣建立。建法為：A 區為 p 的奇數方陣, B 區為 A 區各格之值加上 $1 \times p^2$ 之值, C 區為 A 區各格之值加上 $2 \times p^2$ 之值, D 區為 A 區各格之值加上 $3 \times p^2$ 之值。A 區位於左上, B 區位於右下, C 區位於右上, D 區位於左下。



以 6x6 單偶數方陣為例：

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

- 步驟 3. 將左側 A, D 兩區黃色各格對調。左側需交換的黃色欄數為 1 至 $k(= (N-2)/4)$ 加上兩個對角線交叉點, 其中與後者同列的第一欄那格可免交換。速記： k 代表 A 區對角線交叉點以左的總欄數。

當 $N=6$, $k=1$:

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

Magic(6) , 各列和=各行和=各對角線和=111

當 $N=10$ 時, 步驟 1, 2 可完成以下 10×10 方陣, 當 $N=10$, $k=2$, 左側黃色區亦標示如下:

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

步驟 4. 將右側 B, C 兩區綠色各格對調, 即可完成。右側需交換的綠色欄號為右數 $(k-1)$ 欄, 當 $N=6$ 時, $k=1$, 右側無需交換的欄位, 當 $N=10$ 時, $k=2$, 只有右數第 1 欄需交換。如上表所示。交換結果如下:

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Magic(10) , 各列和=各行和=各對角線和=505

以 14x14 單偶數方陣為例：

當 N=14 時，步驟 1, 2 可完成以下 14x14 方陣：

30	39	48	1	10	19	28	128	137	146	99	108	117	126
38	47	7	9	18	27	29	136	145	105	107	116	125	127
46	6	8	17	26	35	37	144	104	106	115	124	133	135
5	14	16	25	34	36	45	103	112	114	123	132	134	143
13	15	24	33	42	44	4	111	113	122	131	140	142	102
21	23	32	41	43	3	12	119	121	130	139	141	101	110
22	31	40	49	2	11	20	120	129	138	147	100	109	118
177	186	195	148	157	166	175	79	88	97	50	59	68	77
185	194	154	156	165	174	176	87	96	56	58	67	76	78
193	153	155	164	173	182	184	95	55	57	66	75	84	86
152	161	163	172	181	183	192	54	63	65	74	83	85	94
160	162	171	180	189	191	151	62	64	73	82	91	93	53
168	170	179	188	190	150	159	70	72	81	90	92	52	61
169	178	187	196	149	158	167	71	80	89	98	51	60	69

當 N=14 時，k=3，代表儲左側對角線交叉點之外，左側 3 欄，右側 2 欄需交換。結果如下表：

177	186	195	1	10	19	28	128	137	146	99	108	68	77
185	194	154	9	18	27	29	136	145	105	107	116	76	78
193	153	155	17	26	35	37	144	104	106	115	124	84	86
5	161	163	172	34	36	45	103	112	114	123	132	85	94
160	162	171	33	42	44	4	111	113	122	131	140	93	53
168	170	179	41	43	3	12	119	121	130	139	141	52	61
169	178	187	49	2	11	20	120	129	138	147	100	60	69
30	39	48	148	157	166	175	79	88	97	50	59	117	126
38	47	7	156	165	174	176	87	96	56	58	67	125	127
46	6	8	164	173	182	184	95	55	57	66	75	133	135
152	14	16	25	181	183	192	54	63	65	74	83	134	143
13	15	24	180	189	191	151	62	64	73	82	91	142	102
21	23	32	188	190	150	159	70	72	81	90	92	101	110
22	31	40	196	149	158	167	71	80	89	98	51	109	118

Magic(14), 各列和=各行和=各對角線和=1379

MATLAB 程式解法

```

p = n/2;      M = magic(p);
M = [M M+2*p^2; M+3*p^2 M+p^2];
if n == 2, break, end
i = (1:p);    k = (n-2)/4;    j = [1:k (n-k+2):n];
M([i; i+p],j) = M([i+p; i],j);
i = k+1;     j = [1 i];      M([i; i+p],j) = M([i+p; i],j)

```