

■ FIGURE 8.10 Friction factor as a function of Reynolds number and relative roughness for round pipes—the Moody chart (Data from Ref. 2 with permission).

### 6-3 管流之表面阻抗

造成管流水頭損失最主要之來源為管壁之磨擦損失，此一摩擦損失對層流而言純粹為粘滯剪應力引發(因此理想流體中此一損失乃假設為零)；而在紊流中則尚包括由壁紊流渦動剪應力之貢獻；層流中之水頭損失有嚴謹之理論公式，而紊流之分析多藉助半經驗公式或查表。

1. Darcy-Weisbach<sup>6</sup> 公式：

考慮直徑  $D$  之水平圓管，如圖 6-12，在 1 與 2 斷面間長度為  $L$ ，具有壓降(Pressure Drop)為  $p=p_2-p_1$ 。由水平力之平衡

<sup>6</sup> Weisbach, J., "Die Experimentalhydraulik," J. S. Engelhardt, Freiburg, 1855.

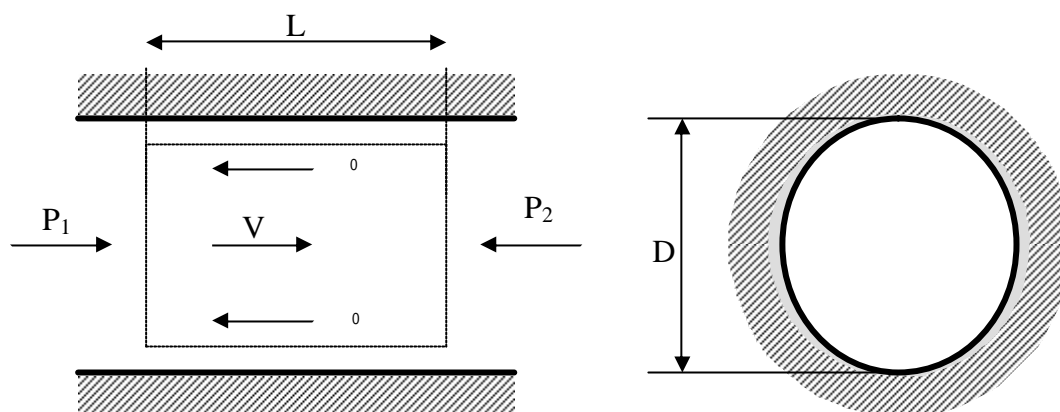


圖 6-12 Darcy-Weisbach 方程式推導

$$(p_1 - p_2) \frac{\rho D^2}{4} = -\Delta p \frac{\rho D^2}{4} = t_0 (\rho D L) \quad (6-34)$$

因此

$$\Delta p = -\frac{4t_0 L}{D} \quad (6-35)$$

又因

$$\sqrt{\frac{t_0}{r}} = u_* = V \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (6-36)$$

即

$$t_0 = \frac{f}{4} \frac{\rho V^2}{2} \quad (6-37)$$

將(6-37)代入(6-35)並由能量方程式知管流由摩擦造成之水頭損失為

$$h_f = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{-\Delta p}{\rho g} = f \left( \frac{L}{D} \right) \left( \frac{V^2}{2g} \right) \quad (6-38)$$

其中  $f$  稱為摩擦因數(Friction Factor)。(6-38)式稱為 **Darcy-Weisbach** 方程式。

\*\*\*\*\*6-20\*\*\*\*\*

(6-37)式亦可有因次分析<sup>7</sup>求得：

$$\begin{aligned}t_0 &= KD^a r^b \mu^c V^d \\&= 2K \operatorname{Re}^{n-2} \frac{rV^2}{2} \\&= \frac{f}{4} \frac{rV^2}{2}\end{aligned}$$

值得注意的是，(6-38)適用於層流與紊流

## 2. 層流

省略均速度之記號  $\text{ave}$ ，由(6-11)中可知完全發展管流之層流流場其平均速度可寫為

$$V = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu L} \quad (6-39)$$

或壓降表為平均速度之關係

$$\Delta p = \frac{32\mu LV}{D^2} \quad (6-40)$$

因此損失水頭為

$$(h_f)_{LAMIN} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{32\mu LV}{\rho g D^2} = \frac{64}{\operatorname{Re}} \frac{L V^2}{D 2g} \quad (6-41)$$

與(6-38)比較可知層流中期摩擦因數相當於

$$f_{LAMIN} = \frac{64}{\operatorname{Re}} \quad (6-42)$$

值得注意的是，(6-41)表示層流中摩擦損失與流速之一次方成正比

$$(h_f)_{LAMIN} = \frac{32\mu LV}{\rho g D^2}$$

<sup>7</sup> 因次分析之方法詳見本書第八章

；而摩擦因數僅為雷諾數之函數，且隨雷諾數增加而減少。

### 討 論

(1)由(6-41)進一步觀察可發現管流層流中由黏滯剪應力引起摩擦損失有以下特性：

- ① 與流速成正比。
- ② 與黏制度成正比。
- ③ 與流動之長度成正比。
- ④ 與單位重成正比。
- ⑤ 與圓管直徑平方(面積)成正比。

(2)(6-42)式寫為  $f_{LAMIN}=64Re^{-1}$ ，兩邊取對數則為  $\log(f_{LAMIN})=\log 64-\log(Re)$ ，可明顯看出若將  $f$  與  $Re$  之關係繪成雙對數圖，將得到一條斜率為-1 之直線。

### 3. 紊 流

(1)由因次分析：

$$\Delta p = \Delta p(D, L, \mathbf{e}, V, \mathbf{r}, \mathbf{m}) \quad (6-43)$$

$$\frac{\Delta p}{\mathbf{r}V^2} = g\left(\text{Re}, \frac{L}{D}, \frac{\mathbf{e}}{D}\right) \quad (6-44)$$

$$\frac{(h_f)_{TURB}}{\frac{V^2}{2g}} = f\left(\text{Re}, \frac{L}{D}, \frac{\mathbf{e}}{D}\right) = \frac{L}{D} f\left(\text{Re}, \frac{\mathbf{e}}{D}\right) \quad (6-45)$$

可得

$$(h_f)_{TURB} = f\left(\text{Re}, \frac{\mathbf{e}}{D}\right) \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (6-46)$$

\*\*\*\*\*6-22\*\*\*\*\*

由此可知，紊流中之損失水頭將與速度之水平成正比，且其摩擦因數將與雷諾數  $Re$  及相對粗糙度(Relative Roughness)  $\mathbf{e}/D$  有關。

(2)由穩態不可壓縮軸對稱完全發展紊流之雷諾方程式：

假設：

- ① 穩態

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

② 不可壓縮 .  $V=0$

③ 完全開展軸對稱紊流。

$$\frac{\partial}{\partial q} = 0, \bar{u} = \bar{u}(r), \bar{v} = \bar{w} = 0, \overline{v'w'} = \overline{u'w'} = 0$$

④ 忽略重力效應。

(6-33)可寫為

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mathbf{m} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'v'}) \\ 0 &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{rv'v'}) + \frac{\mathbf{r}}{r} \overline{w'w'} \end{aligned} \quad (6-47)$$

$$0 = 0$$

將兩是對  $r$  積分

$$\frac{r^2}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -r \left( \overline{ru'v'} - \mathbf{m} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + A(x) \quad (6-48)$$

$$\bar{p}(x, r) - \overline{rv'v'} - \mathbf{r} \int_r^R \frac{\overline{v'v'} - \overline{w'w'}}{r} dr = \bar{p}_0(x)$$

代入  $r=0$  知  $A(x)=0$ 。代入  $r=R=D/2$

$$\bar{p}_0(x) - \bar{p}_0(0) = -\frac{2}{R} \mathbf{t}_0 x = -\frac{4}{D} \mathbf{t}_0 x \quad (6-49)$$

代入  $x=L$  並由

$$\mathbf{t}_0 = \frac{f}{4} \frac{\mathbf{r}V^2}{2} \quad (6-50)$$

\*\*\*\*\*6-23\*\*\*\*\*

損失水頭得

$$(h_f)_{TURB} = \frac{\bar{p}_0(0) - \bar{p}_0(L)}{\mathbf{g}} = f \frac{L V^2}{D 2g} \quad (6-51)$$

(3) 半經驗公式：

由壁紊流之分析，研究發現圓管之紊流摩擦因數具有以下函數關係：

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = A \ln(\text{Re} \sqrt{f}) + B \quad (6-52)$$

其中  $A, B$  為常數。實用上有許多學者提出半經驗公式以供紊流計算摩擦損失，以下條列較種要之數項，並說明其應用範圍：

① Nikuradse<sup>8</sup>：對光滑管(Smooth Pipes)紊流區全部雷諾數均適用

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.80 = 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.8 = 2 \log\left(\frac{\text{Re} \sqrt{f}}{2.51}\right) \quad (6-53)$$

② von Karman<sup>9</sup>：完全紊流區(Complete Turbulence Zone)，壁上之層流次層為壁之糙度所淹蓋，管流之摩擦因數將完全為相對糙度之效應，而與雷諾數無關。

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln\left(\frac{e}{3.7D}\right) = -2 \log\left(\frac{e}{D}\right) + 1.14 = -2 \log\left(\frac{e}{3.7D}\right) = -2 \log\left(\frac{3.7}{\frac{e}{D}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{3.7}{\frac{e}{D}}\right) \quad (6-54)$$

③ Colebrook<sup>10</sup>：介於光滑管與完全紊流區之漸變區(Transition Zone)， $f$  乃與雷諾數及相對糙度有關：

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln\left(\frac{e}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}}\right) = -2 \log\left(\frac{e}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}}\right) = -2 \log\left(\frac{3.7}{\frac{e}{D}} + \frac{\text{Re} \sqrt{f}}{2.51}\right) \quad (6-55)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{3.7}{\frac{e}{D}} + \frac{\text{Re} \sqrt{f}}{2.51}\right) \quad (6-55)$$

<sup>8</sup> Nikursadse, J., "Stromungsesetze in rauhen Rohren," Ver. Deutsch. Ing. Forschungsh. Vol. 361, 1933.

<sup>9</sup> von Ka'rma'n, T. "Turbulence and Skin Friction," J. Aeronautical Science., Vol. 1, No. 1, 1936.

\*\*\*\*\*6-24\*\*\*\*\*

<sup>10</sup> Colebrook, C.F., "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition between the Smooth and Rough Pipe Laws," J.Inst. Civil Engrs.(London), February 1939.

Region

④ Blasius<sup>11</sup> : 當  $Re = 10^5$

$$f = \frac{0.316}{Re^{1/4}} \quad (6-56)$$

⑤ Swamee & Jain<sup>12</sup> : 晚近由於計算機之發展迅速，利用單一公式來取摩擦因數有其實用價值，以下公式在  $1 \cdot 10^{-6} < \epsilon/D < 0.001$  及  $5000 < Re < 1 \cdot 10^8$  所得之結果與用 Colebrook 方程式 (6-55) 之誤差在  $\pm 1\%$  之內，使用上甚為方便：

(6-57)

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

實用上 Moody<sup>13</sup> 修正其之 Stanton 圖(Stanton Diagram)<sup>14</sup>，將許多商用管之摩擦因數繪成雙對數圖以供查用稱為 **Moody 圖(Moody Diagram)**，其對應之公式說明參見圖 6-13。

圖 6-13 中有幾點值得注意：

- ① 最左邊  $Re < 2000$  為層流區(Laminar Range)，由方程式(6-42)知  $f$  僅為  $Re$  之函數，因此為一條斜率為負值之直線。
- ② 當  $2000 < Re < 4000$ ，為臨界區(Critical Range)，無法推求  $f$ 。
- ③ 當  $4000 < Re$  為紊流區(Turbulent Range)，在此一範圍有兩區不同之情形。
  - ❶ 完全紊流區(Complete Turbulence Zone)：在此區中， $f$  與  $Re$  無關，僅與  $\epsilon/D$  有關，如方程式(6-54)所示，故均為水平直線。在此區內流體之黏滯度不影響水頭損失，且損失完全遵循  $V^2$  而變。

<sup>11</sup> Blasius, H. , "Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, "Vei. Deutsch. Ing. Forschungsh. , Vol. 131, 1913.

\*\*\*\*\*6-25\*\*\*\*\*

<sup>12</sup> Swamee, P. K. and A. K. Jain, "Explicit Equations for Pipe Flow Problems," Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the ASCE., Vo., 102, No. 5, pp.657-664, 1976.

<sup>13</sup> Moody, L. F. , "Friction Factors for Pipe Flow, "Transactions of the ASME, Vol. 66, No.8, pp.671-684, 1944.

<sup>14</sup> Stanton, T. E. and Pannell, J. R. , "Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids, "Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. ,Vol. 214, 1914.

\*\*\*\*\*6-26\*\*\*\*\*



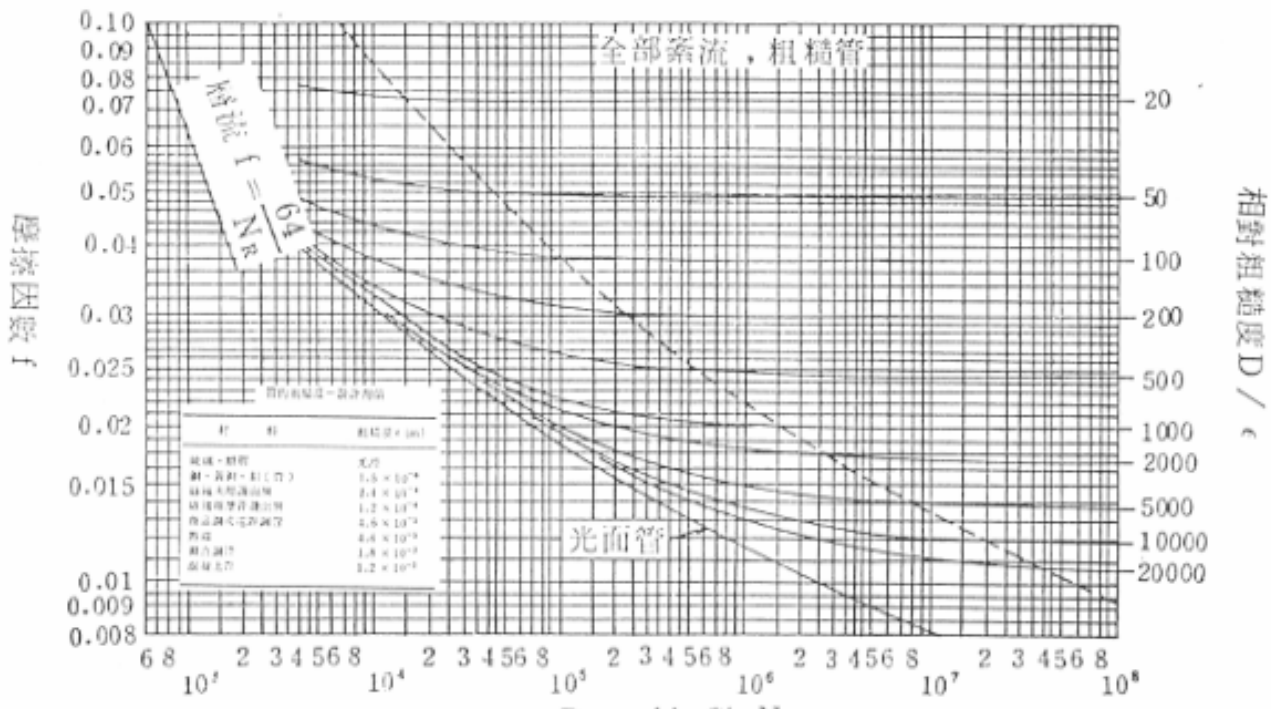


圖 6-13 Moody 圖之意義

- ② 漸變區(Transition Zone)：為介於完全紊流區與光滑管之間區域，在其間  $f$  與  $Re$  及  $D/\epsilon$  有關，如方程式(6-55)所示，故均為曲線。當  $Re$  漸增時將趨近於完全紊流區之水平直線，(6-54)；當  $D/\epsilon$  趨近於零，則接近光滑管之方程式(6-53)。  
 隔開此兩區之虛線方程式為

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{Re \left( \frac{\epsilon}{D} \right)}{200} \quad (6-58)$$

(4) 商用管等效砂粒粗糙度(Equivalent Sand Grain Roughness)：

學者隻研究所採用之粗糙度為基於均勻砂粒粗糙度(Uniform Sand Grain Roughness)所得之結果；實際商用管之粗糙度(Equivalent Sand Grain Roughness)或稱有效粗糙度(Effective Roughness)之概念；一些常見商用之等效砂粒粗糙度條列如表 6-1：



\*\*\*\*\*6-27\*\*\*\*\*

表 6-1 各種商用管材之有效粗糙度

	管材	有效粗糙度( $\epsilon$ )mm
1	玻璃(Glass) 回火黃銅(Drawn Brass) 玻璃纖維(Fibre Glass)	光滑管(0.0025)
2	熟鐵(Wrought Iron) 鋼(Steel)	0.045
3	瀝青鑄鐵(Asphalted Cast Iron)	0.122
3	鍍鋅鐵(Galvanised Iron)	0.152
4	鑄鐵(Cast Iron)	.0.260
5	混凝土(Concrete)	0.3~3
6	預鑄混凝土(Precast Concrete)	0.9~9

(5) 管之老化(Aging of Pipes) :

由於長期連續使用，所有之商用管(Commercial Pipes)都會產生老化現象；對於老化之管流摩擦阻力估計，可以採取以下線性關係式估計

$$\epsilon = \epsilon_0 + t \quad (6-59)$$

其中  $\epsilon_0$  為參考時刻之相當砂粒粗糙度(Equivalent Sand Grain Roughness)， $t$  為使用年期(單位為年)， $\epsilon$  為老化之速度，參見圖 6-14。值得注意的是，金屬管因生鏽，年久則粗糙度增加，取正值；然而混凝土管因使用變得更光滑，取負值。

\*\*\*\*\*6-28\*\*\*\*\*

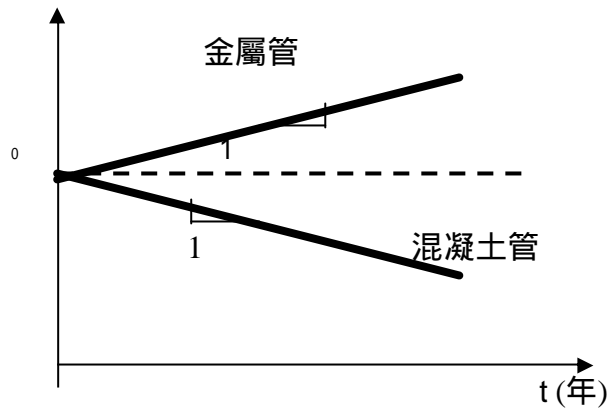


圖 6-14 商用管之老化曲線

**【範例 6-2】 層流之摩擦損失**

流體密度為  $\rho = 1258 \text{ kg/m}^3$  黏滯度為  $\mu = 9.6 \times 10^{-1} \text{ kg/m-sec}$ ，平均流速為  $V = 4 \text{ m/sec}$ ，管徑為  $D = 0.15 \text{ m}$ ，求流經圓管  $L = 40 \text{ m}$  之摩擦水頭損失。

解：(1) 判斷為層流或紊流：因

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(1258)(4)(0.15)}{0.96} = 786 < 2000$$

故為層流。

(2) 計算摩擦因數損失水頭：因為層流，故由(6-42)得

$$f_{L_{AMIN}} = \frac{64}{Re} = \frac{64}{786} = 0.081$$

(3) 計算摩擦損失水頭：由 Darcy-Weisbach 方程式，(6-38)得

$$h_f = f \left( \frac{L}{D} \right) \left( \frac{V^2}{2g} \right) = (0.081) \left( \frac{40}{0.15} \right) \left( \frac{4^2}{2 \times 9.81} \right) = 17.6 \text{ m}$$

**【範例 6-3】 紊流之摩擦損失**

流體密度為  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  黏滯度為  $\mu = 0.001 \text{ poise}$ ，平均流速為  $V = 5.66 \text{ m/sec}$ ，管徑為  $D = 0.15 \text{ m}$ ，相對糙度為  $\epsilon/D = 0.0002$  求流經圓管  $L = 40 \text{ m}$  之摩擦水頭損失。

\*\*\*\*\*6-29\*\*\*\*\*

解：(1)判斷為層流或紊流：因

$$Re = \frac{rVD}{\mu} = \frac{(1000)(5.66)(0.15)}{0.001} = 8.48 * 10^5 > 4000$$

故為紊流。

(2)計算摩擦因數損失水頭：

①由附錄 B 之 Moody 圖，由  $Re=8.48*10^5$  及  $e/D=0.0002$ (或  $D/e=5000$ )查得  $f \approx 0.015$ ，

②由 Swamee & Jain 公式，(6-57)，直接計算得

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{e}{D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

$$= \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{0.0002}{3.7} + \frac{5.74}{(8.48 * 10^5)^{0.9}} \right) \right]^2}$$

$$= 0.0149$$

(3)計算摩擦損失水頭：由 Darcy-Weisbach 方程式，(6-38)得

$$h_f = f \left( \frac{L}{D} \right) \left( \frac{V^2}{2g} \right) = (0.0149) \left( \frac{40}{0.15} \right) \left( \frac{5.66^2}{2 * 9.81} \right) = 6.4877m$$

#### 4. 非圓形管流之表面阻抗

對於封閉非圓形管流而言，其損失水頭之估計可採取水力半徑(Hydraulic Radius)之觀念利用圓形管之結果分析。考慮圖 6-15 所示非圓形管之斷面，在 1 與 2 斷面間長度為 L，具有壓降(Pressure Drop)為  $p_1 - p_2$ 。由水平力之平衡

$$(p_1 - p_2)A = -\Delta p A = t_0 (P_w L) \quad (6-60)$$

其中  $P_w$  為濕周(Wetted Perimeter)，及浸沒流體之周長。因此

$$\Delta p = \frac{t_0 P_w L}{A} \quad (6-61)$$

又因